Lista 7

1. Considere o escoamento de fluido Newtoniano entre dois cilindros concêntricos de raios R_1 e R_2 com ($R_2 > R_1$). O cilindro externo está fixo enquanto o cilindro interno gira com velocidade angular Ω em torno do seu próprio eixo. Utilizando as hipóteses que julgar necessárias, determine o torque que atua sobre o cilindro de raio R_1. Com base neste problema, proponha um experimento para se medir a viscosidade de fluidos Newtonianos.

2. O problema de escoamento bidimensional permanente em torno de um cilindro de raio a envolve a determinação do campo de velocidade $\mathbf{u} = [u(x,y), v(x,y), 0]$ que satisfaz as equações

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\mathbf{u}, \qquad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

juntamente com as condições de contorno

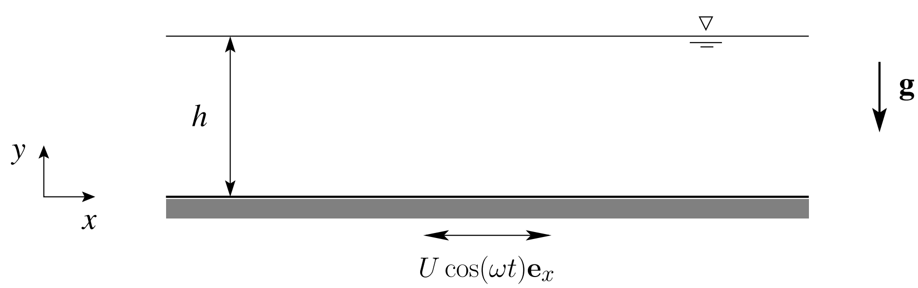
$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \;\text{ em }\; x^2 + y^2 = a^2; \qquad \mathbf{u} \to (U, 0, 0) \;\text{ quando }\; x^2 + y^2 \to \infty.$$

Considre que o cilindro (estacionário) esteja imerso em um escoamento uniforme incidente com velocidade U. Formule o problema na forma adimensional empregando as varáveis

$$x' = \frac{x}{a}, \quad y' = \frac{y}{a}, \quad \mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u}}{U}, \quad p' = \frac{p}{\rho U^2}$$

no lugar de x, y, $\mathbf{u}$ e p. Sem resolver o problema, mostre que a configuração das linhas de corrente depende de ν, a e U combinados na forma de $\mathrm{Re} = Ua/\nu$. Desta forma, escoamentos com iguais números de Reynolds são dinamicamente similares.

3. Considere escoamento incompressível com superfície livre mostrado na figura abaixo. O contorno inferior oscila em seu plano com velocidade $U\cos(\omega t)\mathbf{e}_x$, em que ω é a frequência de oscilação. (a) Adimensionalize a equação do movimento. (b) Identifique os parâmetros adimensionais independentes do problema e interprete-os fisicamente. (c) Especifique a condição para a qual é plausível a aproximação de regime permamente.



4. Os chamados escoamentos geofísicos, os quais ocorrem na atmosfera e nos oceanos, são descritos pela equação do movimento para um sistema de referência não-inercial, que gira com a Terra a uma velocidade angular constante $\mathbf{\Omega}$. Neste caso, devemos substituir a derivada material pelo operador

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\ldots) + \mathbf{\Omega} \times (\ldots)$$

e a velocidade por

$$\mathbf{u} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}$$

em que $\mathbf{r}$ é o vetor posição.

(a) Mostre que a equação de Navier-Stokes assume a forma:

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}\right)+2\rho\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{u}+\rho\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r})=\rho\mathbf{g}-\nabla p+\text{termos viscosos}, \tag{1}$$

em que $2\rho\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{u}$ representa o efeito da força de Coriolis e $\rho\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r})$ o efeito da força "centrífuga".

(b) Incorporando os efeitos hidrostático e da força "centrífuga" na pressão modificada P e desprezando os termos viscosos na Eq. (1), obtemos

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}+2\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{u}=-\frac{1}{\rho}\nabla P. \tag{2}$$

Adimensionalize a equação (2), identifique o parâmetro adimensional do problema (conhecido como número de Rossby) e interprete-o fisicamente. Calcule o valor típico do número de Rossby para escoamentos: (a) na atmosfera, com escala de comprimento característica $L\sim 10^4$ km e escala de velocidade $U\sim 10$ m/s e (b) nos oceanos, com $L\sim 10^2$ km e $U\sim 1$ m/s? A equação (2) poderia ser simplificada nestes casos?

5. O escoamento de um fluido viscoso em um meio poroso é governado pela equação

$$\mathbf{0}=-\nabla p-\frac{\mu}{k}\mathbf{u},$$

em que μ é a viscosidade do fluido e k é a permeabilidade do meio. Escoamentos bidimensionais em meios porosos podem ser reproduzidos experimentalmente utilizando uma célula de Hele-Shaw, onde fluido viscoso escoa entre duas placas planas horizontais separadas por uma distância h constante.

(a) Para h muito pequeno comparado com o comprimento e a largura das placas, mostre que as componentes u e v do escoamento (induzido por gradientes de pressão horizontais) em uma célula de Hele-Shaw são dadas por:

$$u(z)=-\frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}z(h-z),\qquad v(z)=-\frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial y}z(h-z)$$

(b) Definindo as velocidades médias

$$\bar{u}=\frac{1}{h}\int_0^h u\,\mathrm{d}z,\qquad \bar{v}=\frac{1}{h}\int_0^h v\,\mathrm{d}z,$$

determine qual deve ser o espaçamento h entre as placas da célula de Hele-Shaw para que o campo de velocidade $\bar{\mathbf{u}}=(\bar{u},\bar{v})$ observado experimentalmente seja dinamicamente similar ao escoamento bidimensional de fluido com viscosidade μ em um meio poroso com permeabilidade k.