Lista 8

1. Escreva as equações de Navier-Stokes 2D em termos das seguintes variáveis adimensionais:

$$x' = \frac{x}{\ell}, \qquad y' = \frac{y}{\mathrm{Re}^{-1/2}\ell}, \qquad u' = \frac{u}{U}, \qquad v' = \frac{v}{\mathrm{Re}^{-1/2}U}, \qquad p' = \frac{p}{\rho U^2},$$

   em que

$$\mathrm{Re} = \frac{U\ell}{\nu}.$$

   Tomando o limite em que Re $\to \infty$, mostre que as equações de camada limite na forma adimensional podem ser escritas na forma

$$\begin{aligned} u'\frac{\partial u'}{\partial x'} + v'\frac{\partial u'}{\partial y'} &= -\frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \\ 0 &= -\frac{\partial p'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} &= 0 \quad \text{(continuidade).} \end{aligned}$$

2. Calcule a espessura de deslocamento δ^* e a espessura de quantidade de movimento θ para a camada limite laminar sobre uma placa plana lisa com perfil de velocidade dado por:

$$\frac{u}{U} = \frac{3}{2}\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3.$$

3. Considere o seguinte perfil de velocidade bidimensional:

$$\frac{u}{U} = a + b\left(\frac{y}{\delta}\right) + c\left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + d\left(\frac{y}{\delta}\right)^3.$$

   Determine o valor das constantes a, b, c e d para que este perfil represente a distribuição de velocidade em uma camada limite de espessura δ sobre uma placa plana quando sobre esta incide um escoamento uniforme U.

   Considere que a placa plana tenha comprimento total L. Utilizando a formulação integral de camada limite, mostre que a força de arrasto F por unidade de largura da placa é dada por:

$$F = \frac{323}{500}\rho U^2 L \mathrm{Re}_L^{-1/2},$$

   em que Re_L é o número de Reynolds baseado no comprimento L da placa.

4. Considere um escoamento de camada limite sujeito a um gradiente de pressão e com perfil de velocidade da forma

$$\frac{u}{U} = 3\left(\frac{y}{\delta}\right) - 3\left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + \left(\frac{y}{\delta}\right)^3,$$

   com

$$\frac{u}{U} = 1, \qquad \text{para } \frac{y}{\delta} > 1.$$

   (a) O gradiente de pressão é favorável ou adverso? Justifique.

   (b) Determine a equação diferencial que deve ser satisfeita pela espessura $\delta(x)$.

   (c) Se $U(x) \sim x^{1/9}$, mostre que $\delta(x)$ deve ser da forma $\delta(x) \sim x^{4/9}$.

   (d) Interprete fisicamente a influência do gradiente de pressão sobre o crescimento da espessura $\delta(x)$. Faça uma comparação com o escoamento de camada limite laminar sobre placa plana.

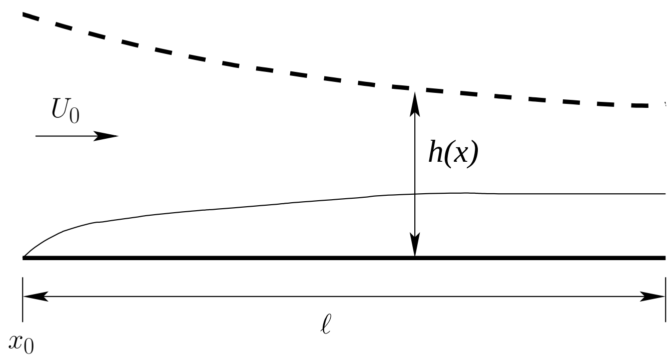
5. Considere um escoamento de camada limite com perfil de velocidade da forma:

$$\frac{u}{U} = 3\left(\frac{y}{\delta}\right) - 3\left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + \left(\frac{y}{\delta}\right)^3.$$

   (a) Suponha que o escoamento irrotacional externo à camada limite tenha a forma $U(x) = cx^m$. Qual das opções a seguir: (a) $m = 0$; (b) $m > 0$ ou (c) $m < 0$ é compatível com o perfil acima? Justifique sua resposta.

   (b) Dado que a espessura δ da camada limite e a tensão cisalhante na parede τ_0 variem com x da forma $\delta \sim x^n$ e $\tau_0 \sim x^k$, respectivamente, determine como n e k dependem de m? Explique fisicamente a diferença (se houver) do comportamento de $\delta(x)$ com relação o crescimento típico da espessura da camada limite laminar sobre uma placa plana.

6. Considere escoamento de camada limite sobre a placa inferior de um canal convergente, conforme esquematizado na figura abaixo.



   As espessuras de deslocamento δ^* e momento θ evoluem, respectivamente, na forma $\delta^* = A\sqrt{x}$ e $\theta = B\sqrt{x}$, em que A e B são constantes conhecidas.

   (a) Dado que a tensão cisalhante na parede τ_0 evolui conforme

$$\tau_0 = \frac{\rho U^2(x)}{2}\sqrt{\frac{\ell}{x}},$$

   em que ℓ é o comprimento da placa, determine $U(x)$ sabendo que $U = U_0$ em $x = x_0$.

   (b) Dado que $h = h_0$ em $x = x_0$, determine a forma do contorno superior $h(x)$.

7. A camada limite sobre a fronteira inferior de um canal divergente tem perfil de velocidade aproximado por:

$$\frac{u}{U} = a_0 + a_1\frac{y}{\delta} + xa_2\left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + a_3\left(\frac{y}{\delta}\right)^3,$$

   em que $U, a_0, \ldots, a_3$ e δ são funções de x. Determine a forma do perfil na posição $x = \bar{x}$ onde ocorre a separação da camada limite.

8. O perfil de velocidade média $\bar{u}(y)$ do escoamento de camada limite turbulenta sobre uma placa plana lisa é representado com boa aproximação pela expressão

$$\frac{\bar{u}}{U} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7},$$

   em que δ é a espessura da camada limite e U é a velocidade da corrente livre. Utilize o perfil acima e a formulação integral de Kármán-Pohlhausen para mostrar que

$$\delta(x) \sim x^{4/5}.$$

Compare o resultado acima com o comportamento de $\delta(x)$ para uma camada limite laminar. Explique a razão da diferença entre as taxas de crescimento da espessura δ em termos dos mecanismos de transporte de quantidade de movimento em escoamentos de camada limite laminar e turbulenta.